**Livro: Probabilidade - Aplicações à Estatística – Paul L. Meyer**

**Capitulo 4 – Variáveis Aleatórias Unidimensionais.**

**Exemplo 4.9.**

Ao operar determinada máquina, existe alguma probabilidade de que o operador da máquina cometa um erro. Pode-se admitir, razoavelmente, que o operador aprenda, no sentido de que decresça a probabilidade de cometer um erro, se ele usar repetidamente a máquina. Suponha que o operador faça n tentativas e que as repetições sejam estatisticamente independentes. Suponhamos, especificamente, que . Admitamos que se pretendam 4 tentativas (isto é,) e definamos a variável aleatória como o número de operações da máquina, executadas sem erro. Note-se que X não tem distribuição binomial, porque a probabilidade de "sucesso" não é constante. Para calcular a probabilidade de que , por exemplo, procede-se do seguinte modo: se, e somente se, houver exatamente uma tentativa mal sucedida. Isto pode ocorrer na primeira, segunda, terceira ou quarta tentativas. Portanto,

**Exemplo 4.10.**

Considere-se uma situação semelhante àquela apresentada no Ex. 4.9. Agora, admitiremos que exista uma probabilidade constante de não cometer um erro na máquina, durante cada uma das tentativas, e uma probabilidade constante de não cometer um erro em cada uma das repetições subsequentes. Seja o número de operações bem sucedidas da máquina durante as tentativas independentes. Vamos procurar a expressão geral de . Pelo mesmo motivo dado no exemplo precedente, não tem distribuição binomiaI. Para obter , procede-se da seguinte maneira: Sejam o número de operações corretas durante as primeiras tentativas, e o número de operações corretas durante as tentativas subsequentes. Portanto, e são variáveis aleatórias independentes e . Assim, se, e somente se, e , para qualquer inteiro que satisfaça às condições e .

As restrições acima, sobre , são equivalentes a e . Combinando-as, poderemos escrever .

Se no primeiro evento ocorrerem sucessos que podem ocorrer de maneiras distintas, então no segundo teremos que teremos , sucessos que podem ocorrer de maneiras distintas. Para cada um dos dois eventos tem distribuição binomial. Então,

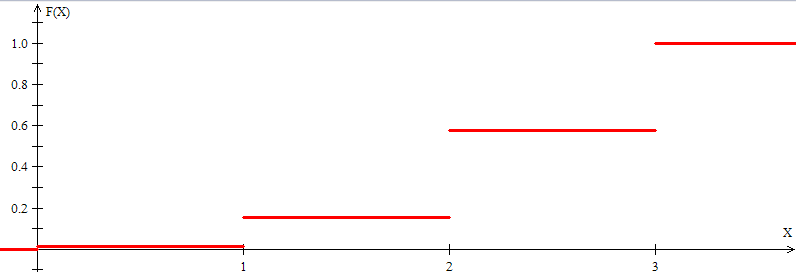
Pelo princípio multiplicativo e aditivo. Temos,

Ou

**Problemas**

1. Sabe-se que uma determinada moeda apresenta cara(F) três vezes mais frequentemente que coroa(V). Essa moeda é jogada três vezes. Seja o número de caras que aparece. Estabeleça a distribuição de probabilidade de e também a fd. Faça um esboço do gráfico de ambas.





1. De um lote que contém 25 peças, das quais 5 são defeituosas, são escolhidas 4 ao acaso. Seja o número de defeituosas encontradas. Estabeleça a distribuição de probabilidade de, quando:
   1. As peças forem escolhidas com reposição.
   2. As peças forem escolhidas sem reposição.

Trata-se de calcular uma probabilidade hipergeométrica, como explicado na seção 2.3.

Seja:

Pelo princípio da multiplicação temos:

1. Suponha que a variável aleatória tenha os valores possíveis .e .
   1. Calcule .

Trata-se da soma de temos de uma PG, com

* 1. Calcule .
  2. Calcule .

1. Considere uma variável aleatória com resultados possíveis: Suponha que
   1. Para que valores de o modelo acima tem sentido?

{

De (A) e (B), temos que:

* 1. Verifique que essa expressão representa uma legítima distribuição de probabilidade.
  2. Mostre que, para quaisquer dois inteiros positivos e .

1. Suponha que a máquina 1 produza (por dia) o dobro das peças que são produzidas pela máquina 2. No entanto, 4% das peças fabricadas pela máquina 1 tendem a ser defeituosas, enquanto somente cerca de 2% de defeituosas produz a máquina 2. Admita que a produção diária das duas máquinas seja misturada. Uma amostra aleatória de 10 peças é extraída da produção total. Qual será a probabilidade de que essa amostra contenha 2 peças defeituosas?

Seja:

1. Foguetes são lançados até que o primeiro lançamento bem sucedido tenha ocorrido. Se isso não ocorrer até 5 tentativas, o experimento é suspenso e o equipamento inspecionado. Admita que exista uma probabilidade constante de 0,8 de haver um lançamento bem sucedido e que os sucessivos lançamentos sejam independentes. Suponha que o custo do primeiro lançamento seja dólares, enquanto os lançamentos subsequentes custam dólares. Sempre que ocorre um lançamento bem sucedido, uma certa quantidade de informação é obtida, a qual pode ser expressa como um ganho financeiro de dólares. Sendo o custo líquido desse experimento, estabeleça a distribuição de probabilidade de .

Custo do primeiro lançamento: .

Custo dos outros lançamentos: .

Custo líquido: .

Seja:

1. Calcule , onde é a variável aleatória definida no Ex. 4.10. Suponha que , , , .

Usando uma planilha do Excel obtemos:

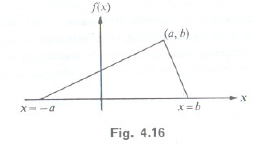
1. *(Propriedades das Probabilidades Binomiais.)* Na explanação do Ex. 4.8, um padrão geral para as probabilidades binomiais foi sugerido. Vamos denotar essas probabilidades por .
   1. Mostre que, para temos:
   2. Empregando (a), mostre que
      1. se

* + 1. se
    2. se
  1. Mostre que se for um inteiro, toma seu valor máximo para dois valores de , a saber, e .

De b) ii) tem se

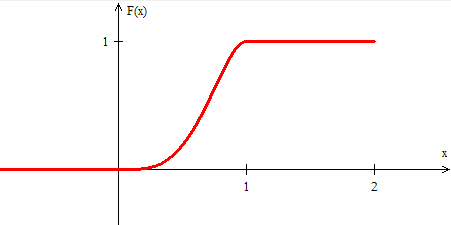
* 1. Mostre que se não for um inteiro, então, toma seu valor máximo quando for igual ao menor inteiro maior que .
  2. Mostre que se não for um inteiro, então, toma seu valor máximo quando for igual ao menor inteiro maior que .
  3. Mostre que se , , enquanto se , .

1. A variável aleatória contínua tem para fdp: }. São feitas duas determinações independentes de . Qual será a probabilidade de que ambas essas determinações sejam maiores do que 1? Se três determinações Independentes forem feitas, qual a probabilidade de que exatamente duas delas sejam maiores do que fdp.
2. Seja a duração da vida de uma válvula eletrônica e admita-se que possa ser representada por uma variável aleatória contínua, com fdp . Seja . Verifique que é da forma e determine .
3. A variável aleatória contínua tem fdp se for um número que satisfaça a , calcule .
4. Suponha que e sejam fdp no mesmo intervalo .
   1. Verifique que não é uma fdp nesse intervalo.
   2. Verifique que, para todo número é uma fdp nesse intervalo.
5. Suponha que o gráfico na Fig. 4.16 represente a fdp de uma variável aleatória .



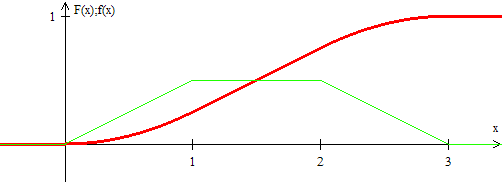
* 1. Qual será a relação entre e ?
  2. Se e, que se pode dizer do maior valor que pode tomar? (Veja a Fig. 4.16).

1. A percentagem de álcool em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória, onde , , tem a seguinte fdp:
   1. Estabeleça a expressão da fd e esboce seu gráfico.



* 1. Calcule
  2. Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificamente, se , o composto se vende por caso contrário, ele se vende por . Se o custo for , calcule a distribuição de probabilidade do lucro líquido por galão.

1. Seja uma Variável aleatória continua, com fdp dada por
   1. Determine a constante .
   2. Determine a fd e esboce o seu gráfico.

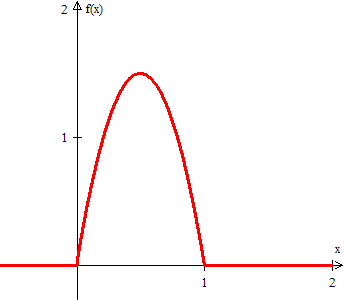


* 1. Se forem três observações independentes de , qual será a probabilidade de, exatamente, um desses três números ser maior do que 1,5?

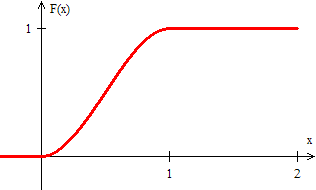
A ocorrência de exatamente um dos três eventos é dada por:

1. O diâmetro de um cabo elétrico supõe-se ser uma variável aleatória continua , com fdp .
   1. Verifique que essa expressão é uma fdp e esboce o seu gráfico.

Para que seja fdp a função contínua deve satisfazer as seguintes condições.



* 1. Obtenha uma expressão para a. fd de e esboce o seu gráfico.

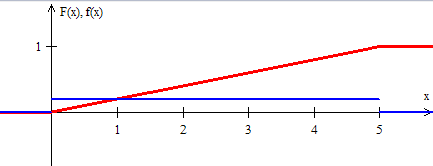


* 1. Determine um número tal que .

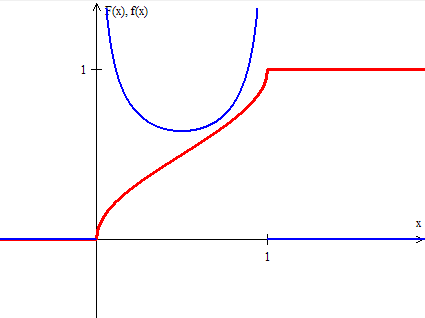
Através do cálculo numérico verificamos que:

* 1. Calcule

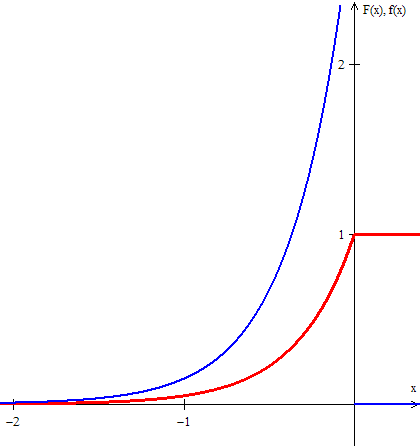
1. Cada uma das seguintes funções representa a fd de uma variável aleatória continua. Em cada caso para e para , onde é o intervalo indicado. Em cada caso, esboce gráfico da função , determine a fdp e faça o seu gráfico. Também verifique que é uma fdp.
   1. .



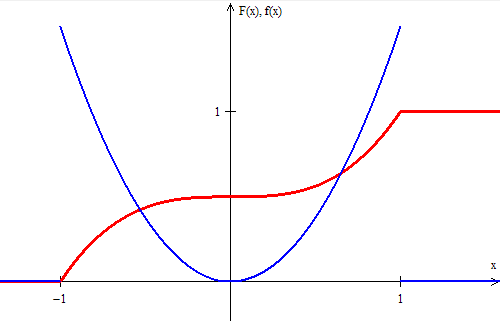
* 1. .



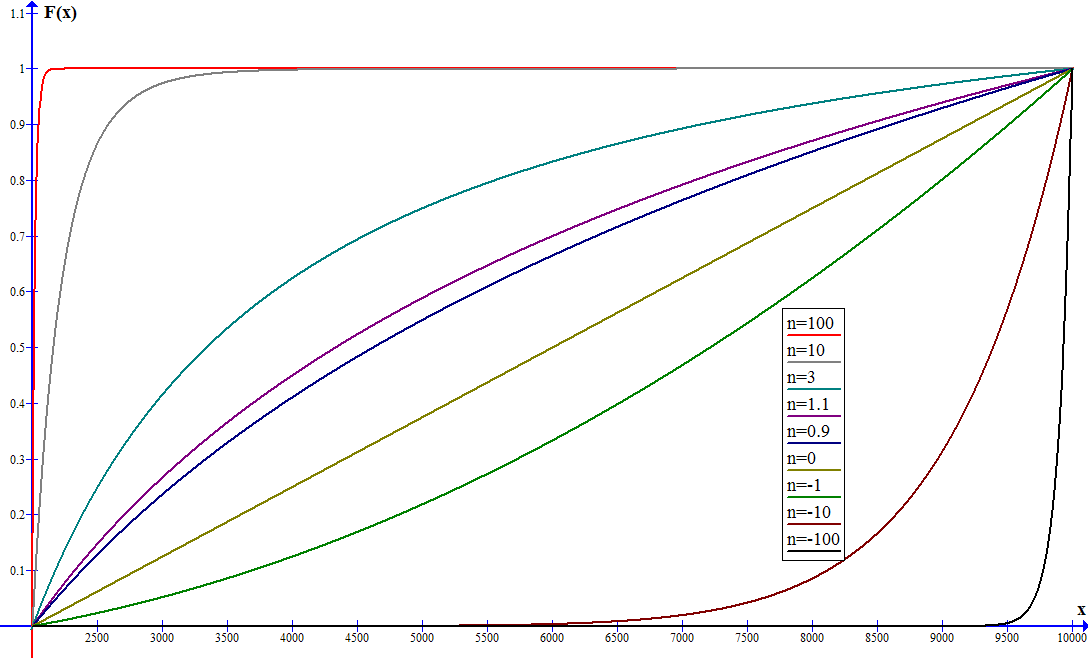
* 1. .

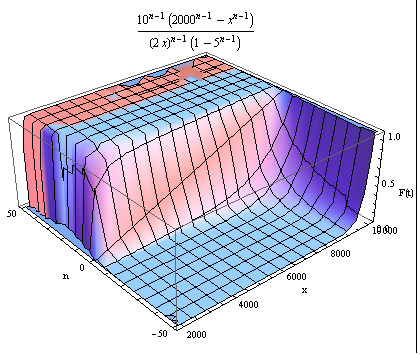


* 1. .



1. Seja a duração da vida (medida. em horas) de um dispositivo eletrônico. Suponha que seja variável aleatória contínua com fdp .
   1. Para , determine .
   2. Para , determine .
   3. Para em geral, determine .
   4. Qual a probabilidade de que o dispositivo falhe antes que 5000 horas se tenham passado?
   5. Esboce a fd para a letra (c) e determine sua forma algébrica.





1. Seja uma variável aleatória com distribuição binomial, baseada em 10 repetições de um experimento. Se , calcule as seguintes probabilidades, empregando a tábua da distribuição binomial do Apêndice:
   1. ;
   2. ;
   3. .
2. Suponha que seja uniformemente distribuída sobre , onde . Quando possível, determine de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:
   1. .
   2. .
   3. .
   4. .
   5. .
3. Suponha que tenha distribuição uniforme sobre , onde . Responda às perguntas do Probl. 4.20.
   1. .
   2. .
   3. .
   4. .
   5. .
4. Um ponto é escolhido ao acaso, sobre uma reta de comprimento . Qual é a probabilidade de que o quociente do segmento mais curto para o mais longo seja menor do que ?

Seja o ponto escolhido com e as extremidades da reta de comprimento .

1. Uma fábrica produz 10 recipientes de vidro por dia. Deve-se supor que exista uma probabilidade constante de produzir um recipiente defeituoso. Antes que esses recipientes sejam estocados, eles são inspecionados e os defeituosos são separados. Admita que exista uma probabilidade constante de que um recipiente defeituoso seja mal classificado. Faça igual ao número de recipientes classificados como defeituosos ao fim de um dia de produção. (Admita que todos os recipientes fabricados em um dia sejam inspecionados naquele dia).
   1. Calcule e .

Seja:

* 1. Obtenha a expressão de .

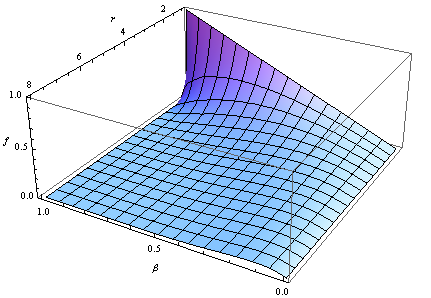
1. Suponha que 5 por cento de todas as peças que saiam de uma linha de fabricação sejam defeituosas. Se 10 dessas peças forem escolhidas e inspecionadas, qual será a probabilidade de que no máximo 2 defeituosas sejam encontradas?
2. Suponha que a duração da vida (em horas) de uma certa válvula seja uma variável aleatória contínua com fdp , para , e zero para quaisquer outros valores de .
   1. Qual será a probabilidade de que uma válvula dure menos de 200 horas se soubermos que ela ainda está funcionando após 150 horas de serviço?
   2. Se três dessas válvulas forem instaladas em um conjunto, qual será a probabilidade de que exatamente uma delas tenha de ser substituída após 150 horas de serviço?
   3. Qual será o número máximo de válvulas que poderá ser colocado em um conjunto, de modo que exista uma probabilidade de 0,5 de que após 150 horas de serviço todas elas ainda estejam funcionando?
3. Um experimento consiste em tentativas independentes. Deve-se admitir que por causa da "aprendizagem", a probabilidade de obter um resultado favorável cresça com o número de tentativas realizadas. Especificamente, suponha que .
   1. Qual será a probabilidade de ter ao menos 3 resultados favoráveis, em 8 repetições?
   2. Qual será a probabilidade de que o primeiro resultado favorável ocorra na oitava repetição?
4. Com referência ao Ex. 4.10:
   1. Calcule , se .
   2. Para arbitrário, verifique que é igual a .
5. Se a variável aleatória for uniformemente distribuída sobre , qual será a probabilidade de que as raízes da equação sejam reais?
6. Suponha que a variável aleatória tenha valores possíveis, e que

.

* 1. Determine a constante .
  2. Ache a moda desta distribuição (isto é, o valor de que torne a maior de todas).

é decrescente em .

A moda é .



1. Uma variável aleatória pode tomar quatro valores, com probabilidades , , e . Para que valores de é esta uma distribuição de probabilidade?

